

图 ($n \leq 9$) 的优美性*

魏众德, 李敬文, 武永兰

(兰州交通大学电子与信息工程学院, 甘肃 兰州 730070)

摘要: 设计了一种递归回溯算法, 采用了剪枝函数与预判函数相结合的算法优化策略, 实现了对有限点内任意图的优美性验证。利用该算法, 对 9 个点内的所有简单连通图进行了优美性验证, 得到该范围内所有优美图和非优美图的数量。结果表明, 在该范围内绝大多数的图是优美的。并且根据实验数据, 文中还得出以下结果: $K_n - m$ (由完全图减去 m 条边所得的图) 是非优美图的下界; 当 p, q 满足一定条件时, 这类 (p, q) 图 (p 为顶点数, q 为边数) 中的所有图全部是优美的; 当 $q \pmod{4} = \{0, 3\}$, 且 $q \leq [3.7p - 9.3]$ 时, (p, q) 图中几乎所有的图都是优美的。且进一步猜测, 当 $p > 9$ 时, 相关结论成立。

关键词: 优美标号; 优美图; 非优美图; 优美空间; 算法

中图分类号: O157.5 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2018) 04-0076-10

The gracefulness of graphs ($n \leq 9$)

WEI Zhongde, LI Jingwen, WU Yonglan

(School of Electronic and Information Engineering, Lanzhou Jiaotong University,
Lanzhou 730070, China)

Abstract: A recursive backtracking algorithm is designed, which uses the algorithm optimization strategy combined with pruning and prejudging function. It achieves the graceful verification for any graphs within finite points. Using this algorithm, the gracefulness of all the simple connected graphs are verifying in 9 points, and the number of all the graceful and ungraceful graphs is obtained in this range. the results show that the vast majority of the graphs are graceful in this range. And according to the experimental data, the following conclusions are also shown: a definite lower bound of graph $K_n - m$ (a graph of complete graph minus m edges) is ungraceful; when p and q satisfy certain conditions, all of this kind of (p, q) graphs (p is the number of vertex, and q is the number of edges) are graceful; when $q \pmod{4} = \{0, 3\}$, and $q \leq [3.7p - 9.3]$, almost all of this kind of (p, q) graphs are graceful. And further guess, when $p > 9$, the relevant conclusions are rational.

Key words: graceful labeling; graceful graph; ungraceful graphs; graceful space; algorithm

现实世界中大多数问题可以抽象为图论问题, 即事物或现象代表为点, 事物之间以及现象之间的某种联系抽象为边, 用图表示出事物之间联系的拓

扑结构, 进一步转变为对图的研究。图论的起源可以追溯至 1736 年 EULER 对格尼斯堡七桥问题的研究, 但在随后的近 200 年里发展缓慢。受近代电子

* 收稿日期: 2018-01-12

基金项目: 国家自然科学基金 (11461038, 61163010)

作者简介: 魏众德 (1994 年生), 男; 研究方向: 图论算法及其应用; E-mail: 18368913164@163.com

通信作者: 李敬文 (1965 年生), 男; 研究方向: 图论算法及其应用; E-mail: lijingwen28@163.com

计算机发展的影响，图论在近年来得到快速发展，形成了一个重要的数学分支，并与矩阵论、群论等分支相互交叉做研究。图论广泛应用于计算机科学、网络、有机化学等多个领域，尤为热门的机器学习、神经网络，以图论的数学理论背景作为基础，进而研究出基于图论的机器学习算法，并得以广泛应用。

图的优美标号问题是图论中最为热门的研究之一，它的研究始于 20 世纪 60 年代 Rosa^[1] 提出的优美树猜想：所有的树都是优美的，由于优美标号的组合数变化很多，在数学理论分析上造成很大困难，因此该猜想至今无人证明或否定，2010 年 Fang 等^[2] 利用计算机算法证明了 35 个顶点内的所有树都是优美的。在优美树猜想提出的近 40 年中，又有多人提出了其它相关猜想，比如：1980 年 Graham 等^[3] 提出：任何树都有和谐标号，1991 年 Gnanajothi 等^[4] 提出：每棵树都是奇优美的。标号种类以及标号理论分析的多样性使得研究者查阅文献较为困难，而在文献 [5] 中，则详细列出了近 60 年内所有标号的研究现状。优美图的概念由 Rosa^[1] 首次提出，随后 Golomb^[6] 对优美图给出了明确的定义。由于优美图在军事方面比如：雷达脉冲码，通信网络等方面的广泛应用，所以更加引起学者们的重视，并且其理论研究具有重要价值。

国内外学者对优美图的研究，目前主要集中在树、与圈相关的图、部分特殊图、并图和一些非连通图等方面^[7-10]，例如毛毛虫、花树等特殊树目前已经证明是优美的。而对于一般图的优美性及非优美性研究很少，Erdős^[3] 在未正式发表的一篇论文中阐述了多数图并不是优美的，但未得到证明。Rosa 认为一个图 G 是非优美的主要有 3 个原因^[1]：① 图 G 有太多的顶点且没有足够的边；② G 有太多的边而没有足够的顶点，③ G 的边数具有错误的奇偶性。因此，本论文结合文献 [11] 给出的生成非同构图的算法源代码，以及结合目前已实现的优美标号算法，给出了 9 个点内的所有优美图及非优美图的数量，并对数据进行分析，得出该范围内的所有图，非优美图占比很小，且非优美图的分布很有规律，大致满足 Rosa 提出的 3 个基本原因；对应的，优美图的分布也呈现出很有趣的现象，下节给出具体定理和相关猜想。

文中所用的 $[m, n]$ 为集合 $\{m, m + 1, m + 2, \dots, n\}$ ，即从 m 到 n 的自然数。为方便起见，

以下给出优美标号和优美图的定义。

定义 1^[6] 如果一个 (p, q) 图 G (p 个顶点， q 条边) 存在一个映射 $f: V(G) \rightarrow [0, q]$ ，使得图 G 中任意两个顶点 x, y 满足 $f(x) \neq f(y)$ ，并且定义边 $uv \in E(G)$ 的标号为 $f(uv) = |f(u) - f(v)|$ 。当 $\{f(uv): uv \in E(G)\} = [1, q]$ 时，则称 f 为图 G 的一个优美标号 (garceful labeling)，图 G 称为优美图 (graceful graph)。

算法是基于搜索优美空间的，进而找出图的优美标号。为了详细说明算法的执行过程，以下给出优美空间的明确定义。

定义 2 对于边数为 q 的一类优美图，都存在一个表 (如表 1)，并且满足：

- (i) $\text{Min}(f(u), f(v)) \geq 0$;
- (ii) $\text{Max}(f(u), f(v)) \leq \text{edgeLabel}$;
- (iii) $|f(u) - f(v)| = \text{edgeLabel}$ 。

则称此表为边数为 q 的优美集合，又称 q 优美空间。

表 1 q 优美空间
Table 1 q graceful space

| 边标号 (edgeLabel) | 相邻顶点标号 ($f(u), f(v)$) |
|-----------------|----------------------------------|
| q | $(0, q)$ |
| $q - 1$ | $(0, q - 1) (1, q)$ |
| | |
| 1 | $(0, 1) (1, 2) \dots (q - 1, q)$ |

由此可知，对于每个边标号 (edgeLabel)，对应的取唯一一个二元组 (由该边的两个相邻顶点标号组成)，而这些二元组集合组成的图都是优美的。

例 1 如表 2 为 $q = 9$ 的优美空间，取出的二元组对应优美图如图 1 所示。

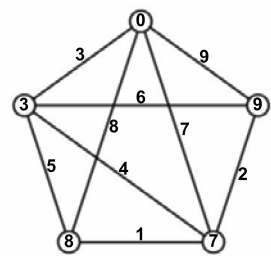


图 1 $G(5, 9)$ 优美标号

Fig. 1 A graceful labeling of $G(5, 9)$

表 2 $q=9$ 优美空间
Table 2 Graceful space with $q=9$

| 边标号(edgeLabel) | 相邻顶点标号($f(u), f(v)$) |
|----------------|-------------------------------|
| 9 | (0,9) |
| 8 | (0,8) (1,9) |
| 7 | (0,7) (1,8) (2,9) |
| 6 | (0,6) (1,7) (2,8) (3,9) |
| 5 | (0,5) (1,6) (2,7) (3,8) (4,9) |
| 4 | (0,4) ... (3,7) (4,8) (5,9) |
| 3 | (0,3) ... (4,7) (5,8) (6,9) |
| 2 | (0,2) ... (5,7) (6,8) (7,9) |
| 1 | (0,1) ... (6,7) (7,8) (8,9) |

文中是对 9 个点内的所有图进行了优美性验证, 其中包含了树、单圈图、双圈图以及其它图, 而树和单圈图已经提出相关猜想, 以下列出:

猜想 1^[1] 所有的树都是优美的。

猜想 2^[12] 除了圈 C_n , $n \pmod 4 = \{1, 2\}$ 是非优美图之外, 其它所有的单圈图都是优美的。

1 定理和猜想

本文所讨论的图均为简单连通图, 若为非连通图则另加说明。对于一类 (p, q) 图, 判断其中每个图是否优美的解决思路如下: ① q 优美空间可以组合出 $q!$ 个图; ② $q!$ 个图中包含非连通图和连通图, 但都是优美的; ③ 所有 (p, q) 图中的优美图都包含在 $q!$ 个图中, 即 q 优美空间具有完备性; ④ 如果一个 (p, q) 图不包含在 $q!$ 个图中, 则它是非优美的。基于以上 4 个思路设计的优美图判定算法, 可知, 算法具有正确性, 第二节将给出算法详细步骤。根据算法实验结果, 给出如下定理和猜想。

一类 (p, q) 图, 在边密度过大的情况下, 会导致这一类 (p, q) 图中的所有图全部非优美。以下给出定理 1, 在 9 个点范围内, (p, q) 图由完全图再减去 m 条边 ($K_n - m$), 这类 (p, q) 图仍然是非优美的。

定理 1 当 $5 \leq p \leq 9$, $q \geq \frac{p(p-1)}{2} - m$ 时,

图 (p, q) 是非优美的, 其中:

$$m = \begin{cases} p-5, p=5,6; \\ p-4, p=7,8; \\ p-3, p=9 \end{cases}$$

由定理 1, 可得如下猜测, 对于 (p, q) 图, 当点数大于 9 时, 边数在一定范围内, 这类 (p, q) 图都是非优美的。

猜想 3 当 $p > 9$, $q = \frac{p(p-1)}{2} - m$ 时, 图

(p, q) 是非优美的, 其中 $m=0, 1, \dots, p-3$ 。

算法搜索结果得知, 在 9 个点范围内, 部分 (p, q) 图中的所有图全部是优美的。

定理 2 当 $2 \leq p \leq 4$ 时, (p, q) 图是优美的,

$$\text{当 } p = \begin{cases} 5, q=4,7,8,9; \\ 6, q=5,7,8,11,12,13; \\ 7, q=6,7,8,11; \\ 8, q=7,8,11,12; \\ 9, q=8,11,12,15,16 \end{cases} \text{ 时, } (p, q) \text{ 图是}$$

优美的。

在 9 个点范围内, 并且边密度不大的情况下, (p, q) 图呈现出一定的规律性: 当 $q \pmod 4 = \{0, 3\}$ 时, 这类 (p, q) 图中的非优美图占总图的比例很小, 可以认为绝大多数图都是优美的, 根据实验结果, 对“边密度不大”量化为 $q \leq [3.7p - 9.3]$, 因此可得定理 3。

定理 3 当 $5 \leq p \leq 9$, $q \leq [3.7p - 9.3]$, 且 $q \pmod 4 = \{0, 3\}$ 时, 几乎所有的 (p, q) 图是优美的。

证明 由表 3 - 表 7 可知, 在边密度不大的条件下, 边数 q 呈现出一定的规律性, 即 $q \pmod 4 = \{0, 3\}$ 时, (p, q) 图中几乎所有的图都是优美的, 根据表中数据对此条件进行量化, 取出散点 (x, y) , 其中当 $p=x$, $q \leq y$ 时, (p, q) 图满足此规律, 由表 3 - 表 7 可分别取出散点 $(5, 9)$ 、 $(6, 13)$ 、 $(7, 17)$ 、 $(8, 20)$ 、 $(9, 24)$, 如图 2 所示。

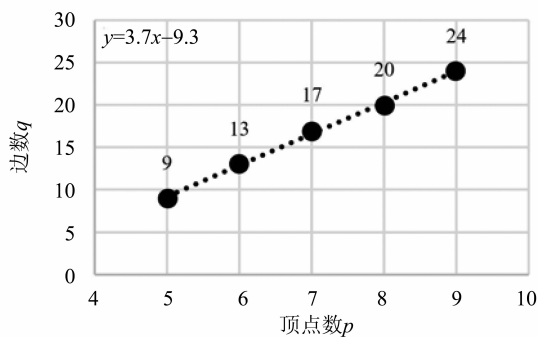


图 2 9 个点内“边密度不大”上界

Fig. 2 The upper boundary of “small side density” in the 9 points

对数据进行线性拟合, 可得 $y = 3.7x - 9.3$, 由于边数为整数, 故定义 $y = [3.7p - 9.3]$ 。因此, $q \leq [3.7p - 9.3]$, 定理 3 成立。

由定理 3, 可以进行如下猜测, 当点数大于 9 时, 该规律依然满足。

猜想 4 当 $p > 9$, $q \leq [3.7p - 9.3]$, 且 $q \pmod{4} = \{0, 3\}$ 时, 几乎所有的图 (p, q) 是优美的。

由于 9 个点内“边密度不大”的上界是根据实验数据结果限定的, 本质上是一个模糊界限, 但是可以对图论中相关标号领域的研究给予数据支持。

2 优美图判定算法

首先利用文献 [11] 中的生成非同构图算法, 生成 9 个点内的所有非同构图, 并且按不同的点与边进行区分, 以邻接矩阵形式分别存储于文件 $p_q.txt$ 中。

本算法包含 2 个子算法, 分别为: 基于优美空间搜索判定算法和基于邻接矩阵优美判定算法。算法 1 的基本思想是: 首先对文件 $p_q.txt$ 做预处理, 其中 p 为图的顶点数, q 为对应边数, 预处理包括 4 部分: (i) 计算文件中图的总个数; (ii) 求每个图对应的度序列; (iii) 求每个图对应的特征值; (iv) 对每个图设一个标志, 用于标识该图是否已经优美; 然后搜索优美空间, 搜索出的图与源文件中的图进行对比, 如果为文件中第 i 个图, 则将图 G_i 标为优美。

算法 1 基于优美空间搜索判定算法

输入: (p, q) 图的邻接矩阵文件 $p_q.txt$

输出: 文件中所有非优美图

```

1. begin
2. 读邻接矩阵文件  $p\_q.txt$ 
3. for  $i \ 1 \rightarrow nn$  是文件中所有图的总个数
4. ComputeDegreeSeq (Graphi)
5. ComputeEigenvalue (Graphi)
6. IsGraphiGrace = false
7. end for
8. search graceful space
9. 二元组集合  $\rightarrow$  邻接矩阵 TempMatrix
10. ComputeDegreeSeq (TempMatrix)
11. ComputeEigenvalue (TempMatrix)
12. for  $i \ 1 \rightarrow n$ 
13. if (IsDegreeSeqSame (Graphi, TempGraph)
&&IsEvalueSame (Graphi, TempGraph)
14. IsGraphiGrace = true;
15. break;
16. end for

```

```

17. if (eachGraph is graceful)
18. break;
19. end search
20. for  $i \ 1 \rightarrow n$ 
21. if (IsGraphiGrace == false)
22. output (Graphi);
23. return
24. end

```

考虑到优美空间庞大以及搜索整个优美空间的时间复杂度较高, 当文件中所有图都已经标为优美时, 或者该文件中大部分图都已标为优美, 只有少量暂时未标为优美的图时, 算法 1 可以结束, 用算法 2 解决剩余图。算法 2 的基本思想是: 对于给定的图, 对应图的邻接矩阵为 M_n , 其中 $M_{ij} = 1$ 代表顶点 i 与顶点 j 之间有边 ($i \neq j$), 对 M_{ii} 进行优美标号, M_{ii} 即代表该图中的各个点, 标号过程为: 首先从优美空间中选出边标号为 q 的 1 个二元组, 然后将二元组 (m, n) 中的 2 个值分别标于邻接矩阵的主对角线上, 即 $M_{ii} = m$, $M_{jj} = n$, 并且需要满足条件 $M_{ij} = 1$, 然后选出边标号为 $q - 1$ 的 1 个二元组 (m', n') , 标于邻接矩阵主对角线上, 边标号递减, 如果当前边标号无法在邻接矩阵中标成功, 则回退至上一级, 重新开始标号; 如果边为 1 的 1 个二元组已经标成功, 则说明该图是优美的, 算法结束。如果整个优美空间已经搜索完毕, 仍未找到该图的优美标号, 则确定该图是非优美的。算法 2 的具体步骤如下:

算法 2: 基于邻接矩阵优美判定算法

输入: 一个邻接矩阵 M_n

输出: 该邻接矩阵对应图是否优美

```

1. begin
2. search graceful space (edgeLabel) edgeLabel
 $\in \{0, 1, 2, \dots, q\}$ 
初始化 edgeLabel =  $q$ 
3. if (edgeLabel == 0)
4. this graph is graceful;
5. return;
6. select a two tuple  $(m, n)$ 
 $m \in \{0, 1, \dots, \text{edgeLabel} - m\}$ ,
 $n \in \{\text{edgeLabel}, \text{edgeLabel} + 1, \dots, q\}$ ,  $|n - m| = \text{edgeLabel}$ .
7. If (tuple  $(m, n)$  is not enabled)
8. ReSelect tuple;
9. for  $i \ 1 \rightarrow n$ 
10. If ( $M_{ii}$  is enabled)

```

```

11.  $M_{ii} = m$ ;
12. for  $j \ i \rightarrow n$ 
13. If ( $M_{ij}$  is enabled &&  $M_{ij} = 1$ )
14.  $M_{jj} = n$ ;  $M_{ij} = \text{edgeLabel}$ ;
15. end for  $j \ i \rightarrow n$ 
16. end for  $i \ 1 \rightarrow n$ 
17. If (conflict - free)
18. search graceful space (edgeLabel - 1)
19. end search
20. if (grace space search finished)
21. This graph is ungraceful
22. end

```

由于算法 2 针对一个特定图, 相比算法 1 的盲目搜索而言, 算法 2 具有更好的收敛性, 且往往是计算机验证非优美图的有力工具。

3 算法结果与分析

本文利用上述优美性判定算法, 结合文献 [11] 中给出的生成非同构图算法, 对 9 个点内的所有图进行了优美性验证, 以下分别列出对 9 个点内的所有图的优美个数统计表, 以及各个点之间图的优美及非优美数对比表, 由于篇幅有限, 本文只给出部分非优美图和优美图。

算法运行环境及硬件配置如下:

操作系统: Windows 764 位

处理器: Intel (R) Core (TM) i7 - 7700 CPU

@ 3.60 GHz

RAM: 64.0 GB

开发环境: Visio Studio 2013

开发语言: C#

3.1 点数为 2-9 的所有图优美个数统计

程序运行结果表明, 当点数为 2, 3, 4 时, 对应的所有图是优美的, 图的总个数分别为 1, 2, 6。以下列出当点数为 5-9 时所有图的优美数及非优美数, 如表 3-表 7。第 1 列为 (p, q) , p 为图的点数, q 为图的边数, 可知, 当点数为 p 时, q 范围为 $[p-1, p(p-1)/2]$; 当 $q = p-1$ 时, 此时图全部为树, 当 $q = p(p-1)/2$ 时, 此时图完全图; 第 4 列为当点数为 p , 边数为 q 的情况下图的总个数; 第 2 列与第 3 列分别为当前图集中优美图个数与非优美个数。

表 3 点数为 5

Table 3 The number of vertices is 5

| (p, q) | 优美图个数 | 非优美图个数 | 总数 |
|----------|-------|--------|----|
| (5, 4) | 3 | 0 | 3 |
| (5, 5) | 4 | 1 | 5 |
| (5, 6) | 4 | 1 | 5 |
| (5, 7) | 4 | 0 | 4 |
| (5, 8) | 2 | 0 | 2 |
| (5, 9) | 1 | 0 | 1 |
| (5, 10) | 0 | 1 | 1 |

表 4 点数为 6

Table 4 The number of vertices is 6

| (p, q) | 优美图个数 | 非优美图个数 | 总数 |
|----------|-------|--------|----|
| (6, 5) | 6 | 0 | 6 |
| (6, 6) | 12 | 1 | 13 |
| (6, 7) | 19 | 0 | 19 |
| (6, 8) | 22 | 0 | 22 |
| (6, 9) | 19 | 1 | 20 |
| (6, 10) | 12 | 2 | 14 |
| (6, 11) | 9 | 0 | 9 |
| (6, 12) | 5 | 0 | 5 |
| (6, 13) | 2 | 0 | 2 |
| (6, 14) | 0 | 1 | 1 |
| (6, 15) | 0 | 1 | 1 |

表 5 点数为 7

Table 5 The number of vertices is 7

| (p, q) | 优美图个数 | 非优美图个数 | 总数 |
|----------|-------|--------|-----|
| (7, 6) | 11 | 0 | 11 |
| (7, 7) | 33 | 0 | 33 |
| (7, 8) | 67 | 0 | 67 |
| (7, 9) | 102 | 5 | 107 |
| (7, 10) | 128 | 4 | 132 |
| (7, 11) | 138 | 0 | 138 |
| (7, 12) | 125 | 1 | 126 |
| (7, 13) | 91 | 4 | 95 |
| (7, 14) | 60 | 4 | 64 |
| (7, 15) | 36 | 4 | 40 |
| (7, 16) | 19 | 1 | 21 |
| (7, 17) | 8 | 2 | 10 |
| (7, 18) | 0 | 5 | 5 |
| (7, 19) | 0 | 2 | 2 |
| (7, 20) | 0 | 1 | 1 |
| (7, 21) | 0 | 1 | 1 |

表 6 点数为 8

Table 6 The number of vertices is 8

| (p, q) | 优美图个数 | 非优美图个数 | 总数 |
|----------|-------|--------|-------|
| (8, 7) | 23 | 0 | 23 |
| (8, 8) | 89 | 0 | 89 |
| (8, 9) | 234 | 2 | 236 |
| (8, 10) | 477 | 9 | 486 |
| (8, 11) | 814 | 0 | 814 |
| (8, 12) | 1 169 | 0 | 1 169 |
| (8, 13) | 1 434 | 20 | 1 454 |
| (8, 14) | 1 554 | 25 | 1 579 |
| (8, 15) | 1 512 | 3 | 1 515 |
| (8, 16) | 1 289 | 1 | 1 290 |
| (8, 17) | 955 | 15 | 970 |
| (8, 18) | 642 | 16 | 658 |
| (8, 19) | 399 | 1 | 400 |
| (8, 20) | 217 | 3 | 220 |
| (8, 21) | 103 | 11 | 114 |
| (8, 22) | 42 | 14 | 56 |
| (8, 23) | 16 | 8 | 24 |
| (8, 24) | 0 | 11 | 11 |
| (8, 25) | 0 | 5 | 5 |
| (8, 26) | 0 | 2 | 2 |
| (8, 27) | 0 | 1 | 1 |
| (8, 28) | 0 | 1 | 1 |

| | | | |
|---------|-----|-----|-----|
| (9, 27) | 665 | 105 | 770 |
| (9, 28) | 197 | 147 | 344 |
| (9, 29) | 88 | 60 | 148 |
| (9, 30) | 0 | 63 | 63 |
| (9, 31) | 0 | 25 | 25 |
| (9, 32) | 0 | 11 | 11 |
| (9, 33) | 0 | 5 | 5 |
| (9, 34) | 0 | 2 | 2 |
| (9, 35) | 0 | 1 | 1 |
| (9, 36) | 0 | 1 | 1 |

由表 3 - 表 7 可以看出, (5, 10), (6, 14 - 15), (7, 18 - 21), (8, 24 - 28), (9, 30 - 36) 中的所有图都是非优美的, 符合 Rosa 提出导致一个图非优美的基本原因中的第 2 条, 由此可得定理 1, 并提出猜想 3; 由表 6 和表 7 可知, 在边数不过大的情况下, 当 $q \pmod 4 = 1, 2$ 时, 其非优美图个数占当前图总数的比例大幅增加, 而当 $q \pmod 4 = 0, 3$ 时, 其非优美图个数占比又相对很小, 符合 Rosa 提出导致一个图非优美的基本原因中的第 3 条, 即 G 的边数具有错误的奇偶性, 由此可得定理 2、定理 3, 并提出猜想 4。尽管非优美图较多, 但相比图的总数而言, 非优美图的数量还是很少的, 如表 8 所示, 列出了 2 - 9 个点内所有图的优美数量和非优美数量以及非优美占比。

由表 8 可知, 当 $p \geq 5$ 时, 有非优美图出现, 但是非优美图数量占图总数的比例很小, 而且比率呈现减小趋势, 因此可以得出, 9 个点内大部分图都是优美的。

3.2 9 个点内部分非优美图

以下给出 9 个点内的部分非优美图, 非优美图的命名规则如下: $G(p, q, \text{num})$, 其中 p 为点数, q 为边数, num 表示当前 (p, q) 图下的第几个非优美图, 如果 (p, q) 图中的非优美图只列出 1 个, 则该图直接命名为 $G(p, q)$ 。

点数为 5 的非优美图已经由文献给出, 一共有 3 个, 如图 3 所示。

点数为 6 的非优美图一共有 6 个, 如图 4 所示, 其中 (1) 为圈 C_6 , 文献 [1] 已经给出对于圈图的优美性证明, (6) 为完全图 K_6 , 文献 [6] 已经证明了当 $n \geq 5$ 时, K_n 是非优美的。

点数为 7 的部分非优美图如图 5 所示, 其中 (3) 为荷兰风车, 文献 [13 - 14] 中已经得出相关结论。

表 7 点数为 9

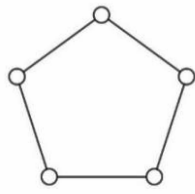
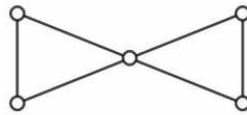
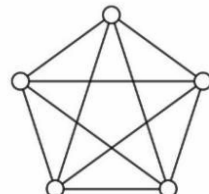
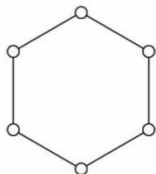
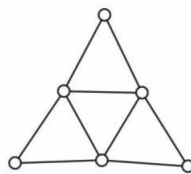
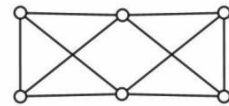
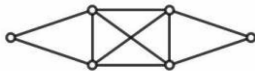
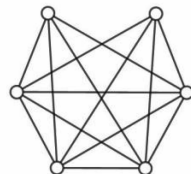
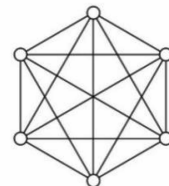
Table 7 The number of vertices is 9

| (p, q) | 优美图个数 | 非优美图个数 | 总数 |
|----------|--------|--------|--------|
| (9, 8) | 47 | 0 | 47 |
| (9, 9) | 239 | 1 | 240 |
| (9, 10) | 794 | 3 | 797 |
| (9, 11) | 2 075 | 0 | 2 075 |
| (9, 12) | 4 495 | 0 | 4 495 |
| (9, 13) | 8 346 | 58 | 8 404 |
| (9, 14) | 13 768 | 87 | 13 855 |
| (9, 15) | 20 303 | 0 | 20 303 |
| (9, 16) | 26 631 | 0 | 26 631 |
| (9, 17) | 31 202 | 198 | 31 400 |
| (9, 18) | 33 152 | 214 | 33 366 |
| (9, 19) | 31 996 | 0 | 31 996 |
| (9, 20) | 27 758 | 6 | 27 764 |
| (9, 21) | 21 660 | 157 | 21 817 |
| (9, 22) | 15 430 | 128 | 15 558 |
| (9, 23) | 10 090 | 6 | 10 096 |
| (9, 24) | 5 957 | 27 | 5 984 |
| (9, 25) | 3 177 | 70 | 3 247 |
| (9, 26) | 1 544 | 91 | 1 635 |

表 8 2-9 个点内所有图的优美个数对比

Table 8 A comparison of the number of graceful numbers of all graphs in 2-9 points

| 点数 (p) | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|------------|---|---|---|--------|-------|-------|--------|---------|
| 图总数 | 1 | 2 | 6 | 21 | 112 | 853 | 11 117 | 261 080 |
| 非优美图总数 | 0 | 0 | 0 | 3 | 6 | 34 | 148 | 1466 |
| 优美图总数 | 1 | 2 | 6 | 18 | 106 | 819 | 10 969 | 259 614 |
| 非优美比率/% | 0 | 0 | 0 | 14.286 | 5.357 | 3.986 | 1.331 | 0.562 |

(1) $G(5,5)$ (2) $G(5,6)$ (3) $G(5,10)$ 图 3 $p=5$ 的非优美图Fig. 3 Ungraceful graphs with $p=5$ (1) $G(6,6)$ (2) $G(6,9)$ (3) $G(6,10,1)$ (4) $G(6,10,2)$ (5) $G(6,14)$ (6) $G(6,15)$ 图 4 $p=6$ 的非优美图Fig. 4 Ungraceful graphs with $p=6$

点数为 8 的部分非优美图如图 6 所示。

点数为 9 的部分非优美图如图 7 所示。其中 (2)、(3)、(4) 是有两个圈共用一个顶点形成, (8) 为两个 K_5 共用一个顶点形成。

由以上部分示例可以得出, 大部分非优美图呈现出很强的对称性, 且很多以并图的方式出现, 并且其中有些图已经被数学证明是非优美的。

3.3 9 个点内部分优美图

为了说明算法的正确性和真实性, 以下列出 9 个点内部分优美图, 而这些优美图的标号多数情况下手工方式较难给出, 以 (8, 13), (9, 14) 部分优美图为例。

(8, 13) 部分优美图如图 8 所示。

(9, 14) 部分优美图如图 9 所示。

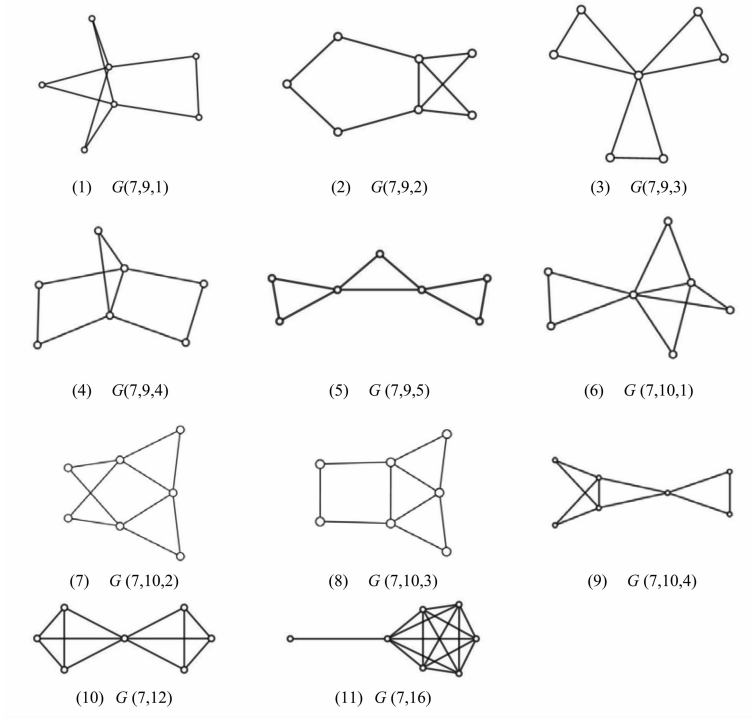


图 5 $p = 7$ 的部分非优美图

Fig. 5 Partial ungraceful graphs with $p = 7$

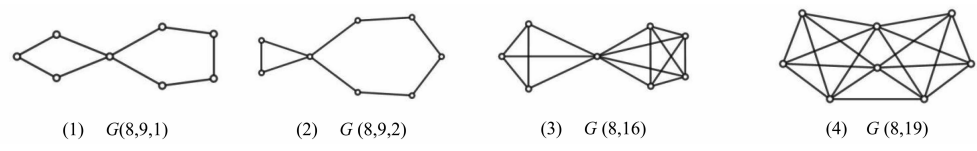


图 6 $p = 8$ 的部分非优美图

Fig. 6 Partial ungraceful graphs with $p = 8$

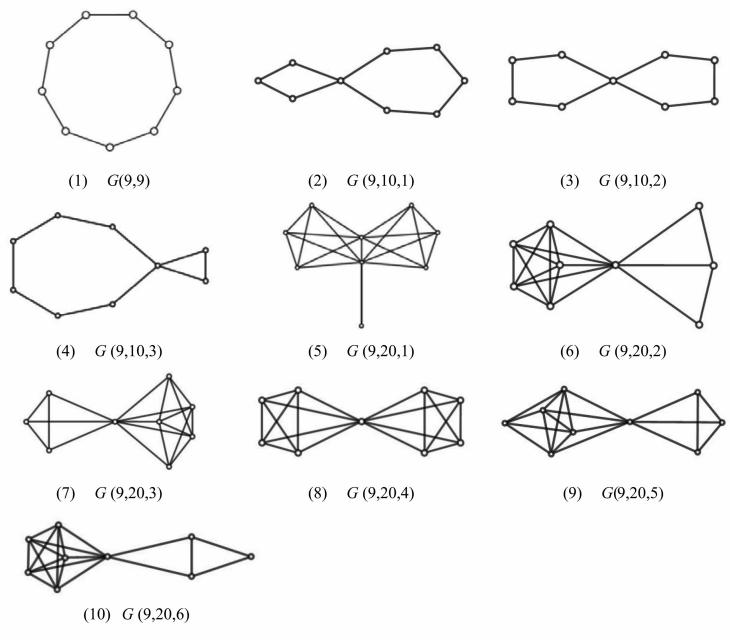


图 7 $p = 9$ 的部分非优美图

Fig. 7 Partial ungraceful graphs with $p = 9$

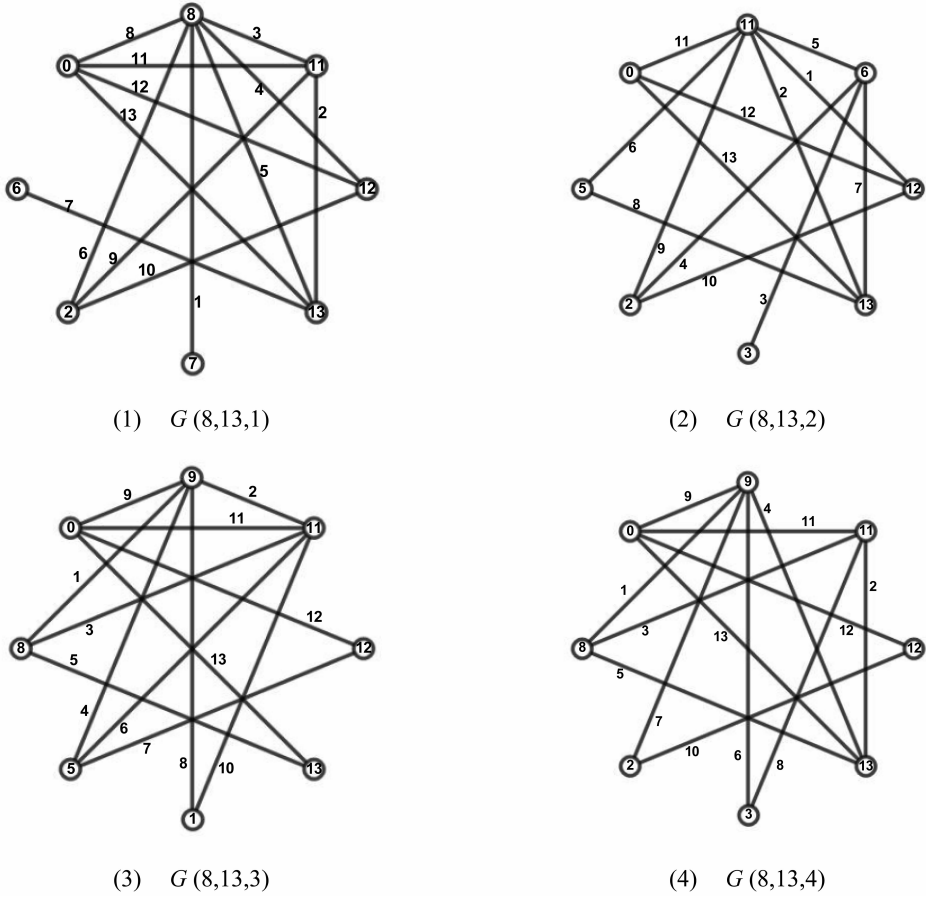


图 8 (8, 13) 部分优美图
Fig. 8 Partial graceful graphs of (8, 13)

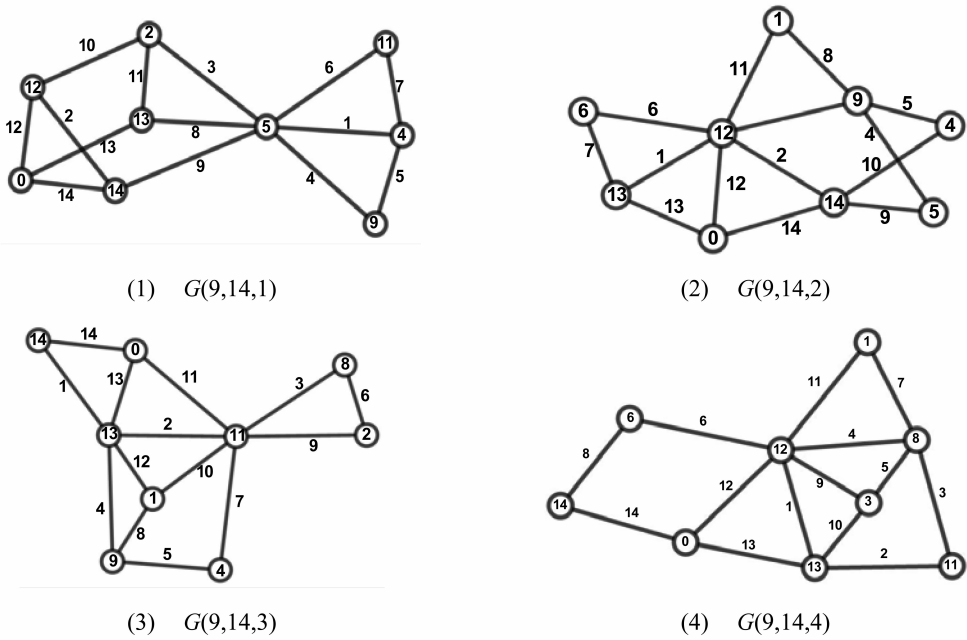


图 9 (9, 14) 部分优美图
Fig. 9 Partial graceful graphs of (9, 14)

随着点数增大以及边数增多, 对应的优美空间也就越大, 且图的总数量呈现出指数级增长, 这导致存储空间过大以及算法执行效率下降。因此, 本文只验证了 9 个点内所有图的优美性。

4 结 语

本文给出一种针对一般图的优美性验证算法, 并引入预判函数对算法进行优化, 该算法可以得出任意图的优美标号, 或者确定该图非优美。然后利用该算法对 9 个点内的所有图进行优美性分析, 最终得出该范围内所有的非优美图。结果表明, 虽然非优美图数量较多, 但相比总数而言, 非优美图数量占比极小, 而且呈现出很强的对称性, 可以认为, 在有限点内, 绝大多数图是优美的。文中第四节给出相关数据及部分非优美图和优美图, 对数据进行分析, 得到了 3 个定理, 并提出相关猜想, 且所得到的数据可以为图标号领域内进一步证明相关

猜想提供基础数据支持。

由表 8 可知, 9 个点内的所有图的总数为 273 192, 优美图总数为 271 535, 优美比率达到 99.393 5%; 另由定理 2 可知, 部分点、边数确定的 (p, q) 图是全部优美的, 因此, 本文提出两个公开问题, 如下:

问题 1 Erdős 提出大部分图是非优美的, 但未得到明确的证明。本文实验得出 9 个点内大部分图是优美的, 优美比率达到 99.393 5%, 且非优美比率呈递减趋势。那么随着点数的增加, 非优美的比率会怎样变化?

问题 2 当 p, q 满足一定的条件时, 这类 (p, q) 图全部是优美的或者是非优美的, 比如: $(9, 19)$ 图中 31 996 个图全部是优美的, $(8, 24)$ 中 11 个图全部是非优美的, 这类图具有怎样的特性? 该如何刻画?

参考文献:

- [1] ROSA A. On certain valuations of the vertices of a graph [J]. *Theory of Graphs*, 1967: 349 – 355.
- [2] FANG W. A computational approach to the graceful tree conjecture [J]. *Computer Science*, 2010.
- [3] GRAHAMS R L, SLOANE N J A. On additive bases and harmonious graphs [J]. *Siam Journal on Algebraic & Discrete Methods*, 1980, 1(1): 382 – 404.
- [4] GNANAJOTHI R B. Topics in graph theory [D]. Madurai Kamaraj University, 1991.
- [5] GALLIAN J A. A dynamic survey of graph labeling [J]. *Electronic Journal of Combinatorics*, 2013, 14.
- [6] GOLOMB S W. How to number a graph [J]. *Graph Theory & Computing*, 1972: 23 – 37.
- [7] 孙彩云, 王涛. 非连通图 $(K_1 \vee (P_n^{(1)} \cup P_n^{(2)})) \cup P_n^{(3)}$ 及 $(K_1 \vee (P_n^{(1)} \cup P_n^{(2)})) \cup S_i(n)$ 的优美性 [J]. *中山大学学报(自然科学版)*, 2014, 53(3): 52 – 56.
SUN C Y, WANG T. The Gracefulness of unconnected graphs $(K_1 \vee (P_n^{(1)} \cup P_n^{(2)})) \cup P_n^{(3)}$ and $(K_1 \vee (P_n^{(1)} \cup P_n^{(2)})) \cup S_i(n)$ [J]. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunya-tseni*, 2014, 53(3): 52 – 56.
- [8] 喻卫. 几类优美图的研究 [D]. 华东交通大学, 2014.
YU W. Several types of the graceful graph [D]. East China Jiaotong University, 2014.
- [9] 唐保祥, 任韩. 2 类优美图的冠的优美标号 [J]. *中山大学学报(自然科学版)*, 2015, 54(5): 24 – 27.
TANG B X, REN H. Graceful labeling of the corona for two kinds of graceful graphs [J]. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni*, 2015, 54(5): 24 – 27.
- [10] 吴跃生. 非连通图 $3C_{4m} \cup C_{(4m+4)} \cup G$ 是优美图的 5 个充分条件 [J]. *兰州大学学报(自然科学版)*, 2016, 52(3): 396 – 404.
WU Y S. Five sufficient conditions for the gracefulness of unconnected graph $3C_{4m} \cup C_{(4m+4)} \cup G$ [J]. *Journal of Lanzhou University (Natural Sciences)*, 2016, 52(3): 396 – 404.
- [11] MCKAY B D, PIPERNO A. Practical graph isomorphism, II [J]. *Journal of Symbolic Computation*, 2014, 60(1): 94 – 112.
- [12] TRUSZCZYNSKI M. Graceful unicyclic graphs [J]. *Demonstratio Mathematica*, 1984, 17: 377 – 387.
- [13] SHEE S. Some results on λ -valuation of graphs involving complete bipartite graphs [J]. *Discrete Mathematics*, 1991, 87(1): 73 – 80.
- [14] YANG Y, LIN X, YU C. The graphs $C_5(t)$ are graceful for $t \equiv 0, 3 \pmod{4}$ [J]. *Ars Combinatoria-Waterloo then Winnipeg-*, 2005, 74: 239 – 244.